Over rationale en irrationale getallen

Het viel mij bij de laatste familiequiz op dat een aantal ploegen dachten dat pi gelijk is aan 22/7.
Dat is slechts bij benadering waar.
Π (pi) is 3,141592653589… en 22/7 = 3,142857 142857 …
Je ziet dat vanaf het 3^e cijfer na de komma de resultaten verschillen.
Maar er is nog een ander essentieel verschil : π is een irrationaal getal en 22/7 is een rationaal getal of een breuk.

Over die soorten getallen wil ik het hier nog eens hebben.

Rationale getallen

Natuurlijke getallen kennen we best : 0, 1, 2, 3, 4, … We noemen ze natuurlijk omdat ze heel natuurlijk zijn, de meest gebruikte, de meest voorkomende. Sommige wiskundigen zeggen dat 0 geen natuurlijk getal is maar in feite maakt dat weinig uit.

De uitbreiding van de natuurlijke getallen met de **negatieve** getallen tot de **gehele** getallen had tot gevolg dat alle aftrekkingen van natuurlijke getallen mogelijk waren : 4 – 7 = - 3.

De 'invoering' van de **rationale** getallen of de **breuken** had tot gevolg dat alle delingen van natuurlijke getallen mogelijk waren : 3 : 5 = 3/5 of 0,6.
Het 'verwarrende' aan breuken is dat dezelfde breuken op oneindig veel verschillende manieren kunnen genoteerd worden : in breukvorm, decimale vorm, procentuele vorm …
Zo is 3/5 hetzelfde als 6/10 of 9/15 of 12/20 …
Maar 3/5 is ook 0,6. Je kan 3/5 ook schrijven als 60 %.

Er zijn twee soorten decimale vormen : de eindige en de oneindige.
3/5 = 0,6 is een eindige decimale vorm.
3/7 = 0,428571 428571 … is een oneindige decimale vorm.
Kenmerkend voor de breuken is dat er in elke oneindige decimale vorm een herhaling optreedt (in 3/7 herhaalt de *periode* 428571 zich steeds). Dat komt hierdoor : als we delen door bijvoorbeeld 7, zijn er maar 7 mogelijke resten : 0, 1, 2, 3, 4, 5 of 6. Vroeg of laat keert een bepaalde rest terug en dus ook een cijfer van het quotiënt !

De eindige decimale vormen kunnen ook geschreven worden als oneindig.
0,6 = 0,60 = 0,600 = 0,600… De periode is hier 0.
1 = 1,0 = 1,00 = 1, 00…

Straffer nog : 1 = 0,99… (opgepast 0,99… is niet 0,99 wat 99/100 is)
Het 'bewijs' is niet zo moeilijk.

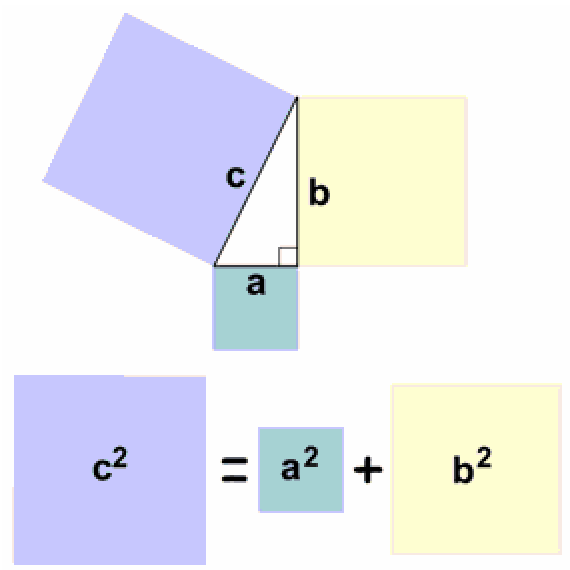
Je weet : 1/3 = 0,33…
Dan is : 3 x 1/3 = 3 x 0,33…
Of : 3/3 = 0,99…
Besluit : 1 = 0,99…

Nogmaals : 1 = 1,00… = 0,99…
Of ook nog 0,99 + 0,01 = 0,99…

Pythagoras

Pytagoras leefde van 569 tot 475 voor Christus (dus ongeveer 2500 jaar geleden).
Hij was de eerste echte 'ontdekker' op het vlak van getallen. Hij had vele volgelingen, die al hun bezittingen moesten opgeven, vegetariër worden, geheimhouding verplicht waren en zijn geloof moesten aanhangen. De ideeën van de wiskunde, filosofie en religie waren met elkaar vervlochten. Pythagoras vatte het vaak samen in één zin : alles is een getal.
De Pythagoristen dachten dat alle getallen rationaal waren. Ze geloofden met andere woorden dat elk getal kon worden uitgedrukt als een geheel getal of als een verhouding die met 2 gehele getallen (integers) kan worden omschreven. Een kwart kon bijvoorbeeld uitgedrukt worden met de integers 1 en 4, misschien in de vorm 1 : 4 of ¼. De schok van de ontdekking van de irrationale getallen kwam hard aan !

De misschien beroemdste stelling uit de wiskunde is door hem (of misschien door één van zijn volgelingen) bewezen.
Die stelling luidt : in een rechthoekige driehoek het kwadraat van de schuine zijde gelijk aan de som van de kwadraten van de rechthoekszijden.
Of meer meetkundig : in een rechthoekige driehoek is de oppervlakte van het vierkant gebouwd op de schuine zijde gelijk aan de som van de oppervlakten van de vierkanten gebouwd op de rechthoekszijden.



Deze onwaarschijnlijk prachtige vondst toont hoe ordekijk en eenvoudig de getallen achter de vorm zijn. Stel dat we een rechthoekige driehoek hebben met korte zijden 3 en 4, dan kunnen we snel berekenen dat de langste zijde 5 is ($3^2 + 4^2 = 5^2$)
Dat gaat op voor elke rechthoekige driehoek. Als we bijgevolg de lengte van twee zijden kennen, kunnen we ook de lengte van de derde zijde berekenen.

Neem nu een rechthoekige driehoek waarvan de rechthoekzijden 1 zijn.
De stelling zegt : $1^2 + 1^2 = a^2$ of $2 = a^2$
Het antwoord voor a ligt tussen 1 en 2. Welke breuk dan ? 7/5 ? Dat levert 1,96 op. 707/500 ? Dat geeft 1,999396. 7072/5000 ? Het resultaat is dan 2,00052736
De schokkende waarheid is dat er geen breuk is waarvan het kwadraat 2 is.

Er moet een mysterieus nieuw soort getal bestaan. Een onnatuurlijk getal. Een getal dat niet kan genoteerd worden. Een getal met een mysterieuze waarde die we niet kennen. Zulke getallen noemen we een *irrationaal*.
De Pythagoristen vonden het idee erachter afschuwelijk. Het schijnt zelfs dat ze de waarheid verborgen en deden alsof die getallen niet bestonden. Een aanhanger, Hipassus, verbrak de eed van geheimhouding en gaf het bestaan van irrationale getallen toe. Hij werd door wraakzuchtige Pythagoristen vermoord.
Edoch, er doken steeds nieuwe irrationale getallen op. Het pythagorisme had zijn beste tijd gehad.

Irrationale getallen

Het antwoord van het probleem van de rechthoekige driehoek waarvan de korte zijden 1 zijn is een getal waarvan het kwadraat 2 is . Dat getal is dus het irrationaal getal $\sqrt{2}$. Dit is een getal dat niet in zijn geheel kan genoteerd worden. We kunnen er wel een deel van opschrijven : 1,414235623…
Het gaat eeuwig door, zonder dat er ooit een regelmatig patroon wordt gevormd.
Een groot verschil ten opzichte van een rationaal getal. Zo zagen we al dat 3/7 kan geschreven worden als 0,428571 428571 … en dat gaat zo eeuwig door, steeds met een zich herhalend patroon.
Alle rationale getallen vertonen patronen. Alle irrationale getallen kennen in het geheel geen patronen.

De 'bekendste' irrationale getallen zijn alle wortelvormen zoals $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$,…en verder fi (φ), pi (π) en e.