# Het irrationaal getal phi (φ)

## De gulden snede

Het irrationaal φ is ongeveer 1,6180339887… Dit getal is terug te vinden in veel maten en verhoudingen van lengtes van oude Griekse beeldhouwwerken, architectuur en zelfs Egyptische piramides. Er wordt gesuggereerd dat het menselijk lichaam is samengesteld uit verhoudingen die gelijk zijn aan φ en dat φ de basis is van alles wat mooi en oogstrelend is. Het getal wordt nu (sinds 1830) als zo speciaal beschouwd dat het de **gulden snede** wordt genoemd.

φ of de gulden snede is een getal dat de verdeling van een lijnstuk in twee delen met een speciale verhouding weergeeft.
Het was de grote Euclides die aangaf hoe het lijnstuk AB moet verdeeld worden : de verhouding van het grootste stuk a en het kleinste b is gelijk aan de verhouding van het gehele lijnstuk a + b en het grootste a.

|_______________________________________|_______________________|

A a b B

a / b = φ en (a + b) / a = φ

Aangezien die verhouding φ ongeveer 1,618 is, komt het simpel gezegd hier op neer :

- Het grootste stuk is ongeveer 1,618 keer het kleinste
- Het totale lijnstuk is ongeveer 1,618 keer het grootste stuk

Een typisch voorbeeld van een 'gulden' verdeling is volgend voorbeeld :

|_______________________________________|_______________________|

1 0,618…

'Bewijs' : 1 / 0,618… = 1,618… en (1 + 0,618…) / 1 = 1,618…
Daarom zeggen sommigen ook dat de gulden snede 0,618… is en niet 1,618…

Om de waarde van **φ** (1,618…) echt te bepalen, volgt nu wat wiskunde uit de humaniora..

$$\Phi = a / b = (a + b) / a$$
$$= a / a + b / a$$
$$= 1 + 1/ \varphi$$

We krijgen dus de vergelijking :

$$\Phi = 1 + 1/ \varphi$$

Of : $\varphi^2 = \varphi + 1$ (alles op gelijke noemer φ die niet 0 is)

Of : $\varphi^2 - \varphi - 1 = 0$

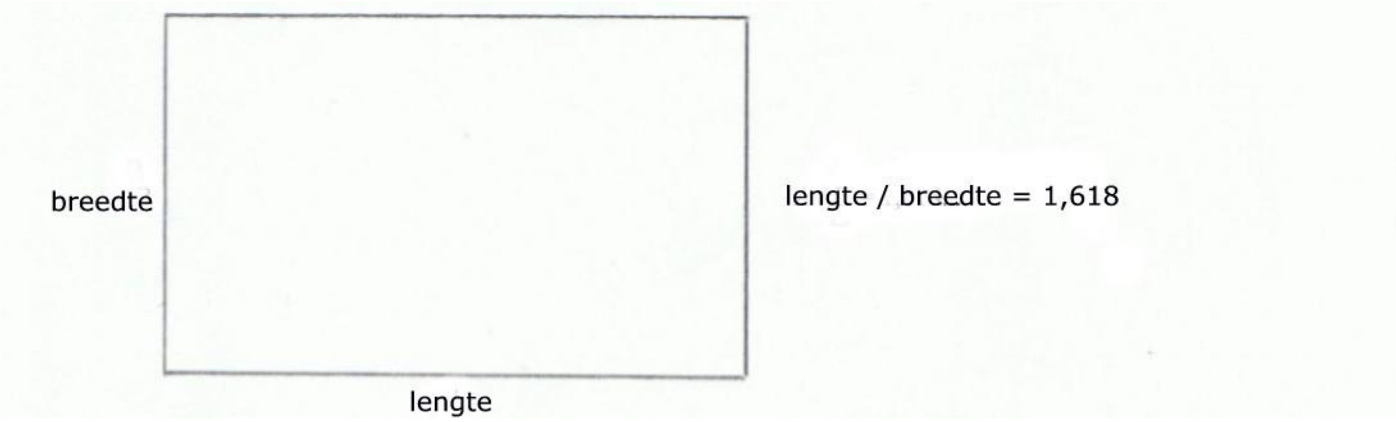
Dit is een vierkantsvergelijking in φ. Zo'n vergelijking wordt opgelost via de discriminant.

Discriminant $D = (-1)^2 - 4.1.(-1) = 5$

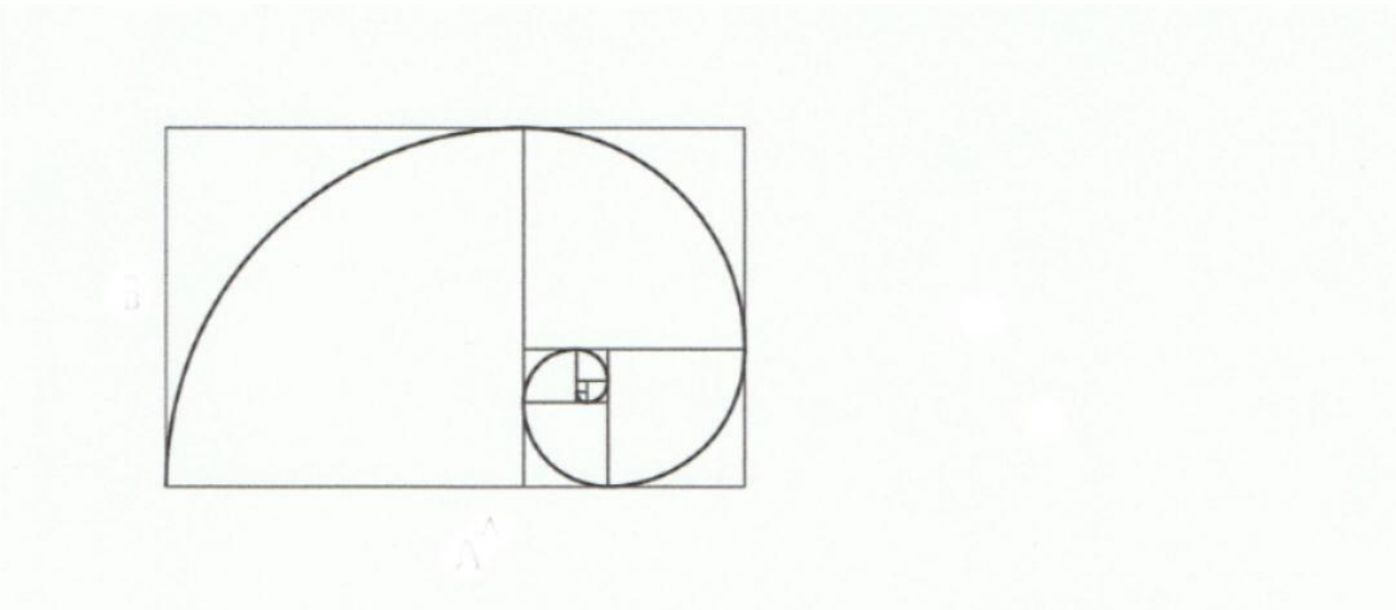
Oplossing : $\varphi = (1 + \sqrt{5}) / 2 = 1{,}6180339887\ldots$

(de andere oplossing is negatief en valt dus weg)

## De gulden rechthoek




Een gulden rechthoek is een rechthoek waarvan de zijden zich verhouden als φ (de lengte is dus ongeveer 1,618 maal de breedte).
Als we in de gulden rechthoek een vierkant tekenen met de breedte als zijde, dan is de kleinere rechthoek die overblijft opnieuw een gulden rechthoek. Door dit proces met de steeds kleiner wordende rechthoeken te herhalen ontstaat een *gulden spiraal*.



Deze spiraal is bekend als de spiraal van Fibonacci.

# Fibonacci

Leonardo van Pisa, beter bekend als Fibonacci, leefde van 1170 tot 1250.
Hij was opgeleid in Noord-Afrika en leerde dat de nieuwe Arabische cijfers 0 tot 9 en de 'positietelling' veel beter was dan de Romeinse cijfers die toen nog gebruikt werden in Europa .
Bij de positietelling hangt de waarde van een cijfer af van de plaats die het inneemt in het getal (in 4341 is de linkse 4 4000 en de rechtse 4 40 waard), bij de Romeinse telling is V altijd 5.
Hij schreef een wiskundeboek voor handelaars (en niet voor academici) waarin hij voorbeelden gaf hoe getallen worden genoteerd worden, hoe winst en verlies worden berekend, hoe valuta's moeten omgerekend worden en hoe rente berekend wordt.

Maar het meest werd hij bekend door de volgende puzzel :

*Iemand plaatst een paar konijnen in een ruimte die langs alle kanten door muren omsloten is. Hoeveel paren konijnen kan dat paar in één jaar produceren, als we stellen dat elk paar elke maand een nieuw paar verwekt en elk paar vanaf de tweede maand productief is ?*

De reden waarom hij met deze puzzel zo beroemd werd zit in de oplossing.

De oplossing …

- Je begint met één paar (resultaat : **1**)
- Na één maand heb je nog altijd het ene originele paar (resultaat : **1**)
- Na twee maanden heb je het originele paar plus een nieuw (resultaat : 1 + 1 = **2**)
- Na drie maanden heb je het originele, het nieuwe en nog een nieuw verwekt door originele paar (resultaat : 2 + 1 = **3**)
- Na vier maanden de vorige drie plus twee nieuwe paren verwekt door paren die ouder zijn dan twee maanden (resultaat : 3 + 2 = **5**)
- Na 5 maanden de vorige vijf plus drie nieuwe paren verwekt door paren die ouder zijn dan twee maanden (resultaat : 5 + 3 = **8**)
- Na 6 maanden : 8 + 5 = **13**
- Na 7 maanden : 13 + 8 = **21**

Dat gaat zo verder. De oplossingsrij is : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, …

Dit is de fameuze rij van Fibonacci.

Ze is vooral bijzonder vanwege wat er gebeurt als je elk getal deelt door zijn voorgaande.

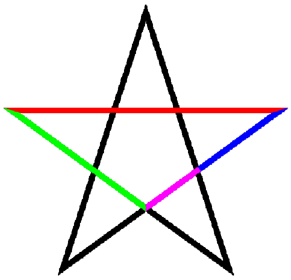
| | |
|---|---|
| 1/1 = | 1 |
| 2/1 = | 2 |
| 3/2 = | 1,5 |
| 5/3 = | 1,66… |
| 8/5 = | 1,6 |
| 13/8 = | 1,625 |
| 21/13 = | 1,61538… |
| 34/21 = | 1,619047… |
| 55/34 = | 1,617647… |
| 88/55 = | 1,61818… |

Je ziet dat deze rij meer en meer nadert naar φ (1,6180339887…) met waarden die alternerend kleiner en groter dan φ zijn; φ zit als het ware geprangd tussen die opeenvolgende waarden.

## Waar vind je φ ?

**Pentagram**

De vier lengtes in dit symbool (aangegeven met verschillende kleuren) verhoudingen tot elkaar zijn de gulden snede.



**Menselijk lichaam**

Bij het 'ideale' menselijk gezicht is

- De breedte van de mond tot de breedte van de wang is φ
- De breedte van de neus tot de breedte van de wang is φ
- De breedte van de neus tot de breedte van de mond is φ

Ook het gehele lichaam van de mens bevat veel 'gulden' verhoudingen zoals

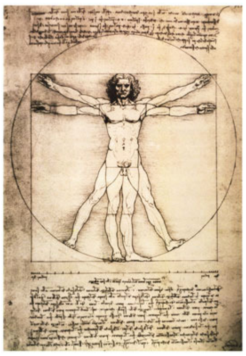
- de lengte van de vingerkootjes ten opzichte van elkaar
- de lengte van de hand en de onderarm
- de lengte van een persoon en de afstand van grond tot navel

**Phidias**

De beelden die Phidias maakte in het Parthenon worden door sommigen in verband gebracht met de gulden snede. De eerste letter van zijn naam, de Griekse letter φ, werd daarom door Mark Barr gebruikt om de gulden snede aan te duiden.

**Menselijk lichaam**

In de Vitruviaanse Man van Leonardo Da Vinci.



**De schelp Nautilus pompilius**

Bepaalde schelpen delen hun kamers in met de φ-verhouding. De schelp Nautilus pompilius is hier een goed voorbeeld van. Naarmate het dier groter wordt, maakt het steeds grotere kamers in zijn schelp, terwijl het de kleinere kamers afsluit. De relatieve volumes van de opeenvolgende kamers verhouden zich volgens de Gulden snede. De schelp heeft de vorm van een logaritmische spiraal. Deze spiraal hebben we ook al teruggezien in de Gulden Rechthoek.

**De zonnebloem**

De reeks van Fibonacci vinden we bijvoorbeeld terug in de zonnebloem. Zonnebloempitten zijn in spiralen gerangschikt. De ene groep spiralen slingert met de klok mee, de andere tegen de klok in. Het aantal spiralen links- en rechtsom is verschillend. Afhankelijk van het soort zonnebloem zijn er 34 en 55, 55 en 89, 89 en 144 ... linkse en rechtse spiralen

**De piramides**

Sommige onderzoekers denken dat de beroemde piramides van de oude Egyptenaren zijn gebouwd op basis van het getal φ.

**De gulden hoek**

Belangrijke delen van bloemen zoals bloemblaadjes, zaden en kelkbladeren groeien uit stukjes weefsel (primordia) die ontstaan op vaste plaatsen. De hoeken tussen die opeenvolgende primordia liggen rond de 137,5°. Deze hoek is juist de hoek die ontstaat bij verdeling van 360° met de gulden snede. Men noemt een hoek van 137,5°, of z'n tegenhanger 360°–137,5°=225,5°, dan ook wel de *gulden hoek*. Uit onderzoek is gebleken dat dit voor een erg efficiënte vulling van het vlak zorgt waardoor de blaadjes maximaal uit elkaar staan en het meeste zonlicht kunnen opvangen. Zonnebloempitten worden ook op deze wijze verdeeld en ook de spiraalvormige bladgroei wordt op diezelfde manier geörienteerd.

**Sprookjes Grimm**

De verdeling tussen goede en slechte eigenschappen bij de hoofdpersonen in de sprookjes van Grimm is evenredig met de Gulden Snede.

**Kruis**

Het kruis van Christus was ontworpen volgens de Gulden Snede.

**Boekdrukkunst**

In de boekdrukkunst wordt de lengte en de breedte van een bladzijde (bladspiegel) bepaald in verhouding tot de grootte van het bedrukte gedeelte (zetspiegel).
Ook hier speelt de Gulden Snede een rol.