Het irrationaal getal e

In 2004 kondigde Google aan dat ze aan kapitaalsuitbreiding gingen doen. Ze zochten niet zó maar een bedrag – niet 1 miljoen of 1 miljard dollar maar 2 718 281 828 dollar. Dat was bedoeld als wiskundig grapje. In het beoogde bedrag zit namelijk het erg belangrijke wiskundige getal e. e is namelijk ongeveer 2,718281828459045…
e is net als fi en pi, een irrationaal getal, een getal dat niet nauwkeurig kan genoteerd worden omdat de cijfers na de komma geen herhaling vertonen.

e is niet zo populair als fi of pi, maar toch ontzettend belangrijk. Het heeft geleid tot een aantal van de belangrijkste wiskundige ideeën.
Zonder e zou het de afgelopen eeuwen nooit mogelijk geweest zijn zoveel vooruitgang te boeken in de techniek en de wetenschappen.
Zonder e zouden we misschien geen ingewikkelde machines hebben kunnen maken.
Zonder e zouden we allicht geen auto's of vliegtuigen en geen computers hebben gehad.

Neper en logaritme

Het verhaal van e begint bij de Schotse wiskundige **Jhone Neper** (nu John Napier). Hij werd in 1550 geboren uit een schatrijke familie. Hij woonde altijd op een kasteel en besteedde gans zijn leven aan het beheren van zijn grote landgoederen, experimenteren met nieuwe manieren om de landbouw te perfectioneren, uitvinden, wiskunde en theologie.
Voor de wiskundigen en de studenten van later was zijn belangrijkste uitvinding : de **logaritme**.
Eenvoudig gezegd komt het hier op neer : logaritmen zetten moeilijke bewerkingen om (een vermenigvuldiging in een optelling, een deling in een aftrekking) en vereenvoudigen andere lastige bewerkingen (machten en wortels worden omgezet in vermenigvuldigingen). Deze bijna magische vereenvoudigingen waren even belangrijk als de uitvinding van de computer, in een tijd dat alle berekeningen nog met de 'hand' moesten uitgevoerd worden. Plots had men alleen nog tabellen (de **logaritmetafels**) en kennis van optellen en aftrekken nodig om snel en nauwgezet ingewikkelde berekeningen te maken.

Een voorbeeld
Stel : je moet zoeken hoeveel 23,475 x 7, 0587 is
In de tabellen zoek je de logaritme van 23,475 en 7, 0587.
Je vindt : 1,3706 en 0,8487
Tel deze twee getallen op (veel gemakkelijker dan vermenigvuldigen) : 2,2193
Zoek dat getal in de tabel en je vindt 165,69
Een redelijk nauwkeurige benadering van 23,475 x 7, 0587 is 165,69 (juiste antwoord is : 165,7029825)

Wat wiskundiger …
De omgekeerde bewerking van de optelling is de aftrekking : als a + b = c dan is b = c - a

De omgekeerde bewerking van de vermenigvuldiging is de deling : als a x b = c dan is b = c : a
De omgekeerde bewerking van de machtsverheffing is de logaritme : als a^b= c dan is b = ${}^a\log c$
(we lezen dit laatste als : b is de logaritme van c in *grondtal* a)

Het gaat nu om de laatste uitdrukking.
Voorbeelden :

als $3^4 = 81$ dan is $4 = {}^3\log 81$

als $10^4 = 10000$ dan is ${}^{10}\log 10000 = 4$ (dit mogen we schrijven als log 10000 = 4)

De logaritme met grondtal 10 noemt men de *Briggse logaritme* of simpelweg logaritme.
Nog wat voorbeelden :

log 100 = 2 omdat $10^2 = 100$

log 1000 = 3 omdat $10^3 = 100000$

log 728 is tussen 2 en 3

Er is nog een belangrijke logaritme : die met ons fameus getal e als grondtal.
Die logaritme noemen we de *Neperiaanse logaritme* of de *natuurlijke* logaritme. Ze wordt geschreven als ${}^e\log$ of ln. In de informatica werken de programmeertalen uitsluitend met deze natuurlijke logaritmen.

Er is een prachtig verband tussen log en ln (tussen de gewone en de natuurlijke logaritme) :

log a = ln a / ln 10

… bij uitbreiding tussen een willekeurige logaritme en de natuurlijke :

${}^b\log a = \ln a / \ln b$

We moeten dus alleen een tabel maken met natuurlijke logaritmen en de ene door de andere waarde delen om een willekeurige tabel met logaritmen te berekenen.

Sparen en lenen

Laat ons nu terugkeren naar e.
Eigenlijk is de ontdekker van e de bekende Zwitserse wiskundige **Jacob Bernoulli**. Dat gebeurde bij toeval en wel als volgt.
Jacob vroeg zich af hoe samengestelde intrest kon worden berekend (bij samengestelde intrest wordt de intrest na elke periode van berekening bij het beginkapitaal gevoegd, zodat het zelf intrest kan opleveren).
Hij wist dat het eindkapitaal sneller zou toenemen als je de rente vaker bij de som zou optellen. Hij wist dus dat bijvoorbeeld het eindkapitaal bij maandelijkse renteberekening sneller zou toenemen dan bij jaarlijkse. Maar wat zou er gebeuren als je elke week berekende ? of elke dag ? of elk uur ? of elke seconde ?

Hij ontdekte al snel het volgende :
Wij nemen voor het gemak een beginkapitaal van € 1 en 100% per jaar, 50% per semester, 25% per kwartaal.

Rentevoet	Periode	Beginkapitaal	Intrest	Eindkapitaal
100% per jaar	jaar	1	1	**2**
50% per sem.	sem 1	1	0,5	1,5
	sem 2	1,5	0,75	**2,25**
25% per trim.	trim 1	1	0,25	1,25
	trim 2	1,25	0,3125	1,5625
	trim 3	1,5625	0,390625	1,953125
	trim 4	1,953125	0,48828125	**2,44140625**

Eigenlijk komt dit wiskundig neer op het volgende :

- Per jaar : $(1 + 1)^1 =$ 2
- Per halfjaar : $(1 + ½)^2 =$ 2,25
- Per kwartaal : $(1 + ¼)^4 =$ 2,44140625

En verder :

- Per maand : $(1 + 1/12)^{12} =$ 2,61303529
- Per week : $(1 + 1/52)^{52} =$ 2,692596954
- Per dag : $(1 + 1/365)^{365} =$ 2,714567485

Dit lijkt simpel, maar Bernoulli vroeg zich af wat er gaat gebeuren als deze reeks eeuwig werd voortgezet. Hoeveel wordt $(1 + 1/n)^n$ als n zéér groot wordt. Zou de waarde dan enorm groot worden ? of tot niets afnemen ? of wat ?
Hij kon bewijzen dat, hoe groter n wordt, des te meer de waarde *convergeert* (als het ware naar één getal samen loopt) richting een nieuw getal dat benaderd kan geschreven worden als 2,718281828459045…Dat getal is dus de 'grens' van de groei, daar stopt het ! Dit getal is opnieuw een irrationaal getal net zoals pi en fi ! (De wiskundige **Euler** noemde het later e).

Bernoulli zag al snel in dat dit nieuwe getal te maken had met machtsverheffing en met logaritmen (het omgekeerde van machtsverheffing). Hij realiseerde zich ook dat het getal vaak voorkwam in de natuur. Er konden logaritmische krommen worden getekend met en deze spiralen leken overal voor te komen zoals in zeeschelpen, bloembladen (zoals we al zagen bij het getal fi en de zonnebloemen) en hoorns van dieren.